26/09/12 ESERCITAZIONI DI MATEMATICA (ECE)

ES 3.26 I) Stabilire se f è pari e se f è dispari:

$$f(x) = x^4 - x^2$$

- Per definizione f è pari $\iff f(x) = f(-x) \quad \forall x$. Abbiamo:

$$f(x) = x^4 - x^2$$
$$f(-x) = (-x)^4 - (-x)^2 = x^4 - x^2 = f(x) \quad \forall x$$

Quindi f è pari.

- Per definizione f è dispari $\iff f(-x) = -f(x) \ \forall x$. Abbiamo:

$$f(-x) = x^4 - x^2$$
$$-f(x) = -(x^4 - x^2) = x^2 - x^4$$

E' facile trovare un $x_0 \in \mathbb{R}$: $f(-x_0) \neq -f(x_0)$ cioè $x_0^4 - x_0^2 \neq x_0^2 - x_0^4$ quindi f non è dispari.

Alla stessa conclusione si poteva giungere osservando che, siccome f è pari, per essere dispari dovrebbe valere:

$$-f(x) = f(-x) = f(x) \quad \forall x$$

ma l'unica funzione f: $\forall x \ -f(x) = f(x)$ è la funzione costante nulla: $f(x) = 0 \quad \forall x$.

ES: 3.26 III) Stabilire se f è pari e se f è dispari:

$$f(x) = x - \frac{2}{x}$$

- $f(x) = x - \frac{2}{x}$; $f(-x) = -x + \frac{2}{x}$

È facile trovare un $x_0 \in \mathbb{R}$: $f(x_0) \neq f(-x_0)$, es.: $x_0 = 1$.

$\Rightarrow f$ non è pari.

- $f(-x) = -x + \frac{2}{x}$; $-f(x) = -\left(x - \frac{2}{x}\right) = -x + \frac{2}{x}$

Quindi $f(-x) = -f(x) \ \forall x \Rightarrow f$ dispari.

<u>OSS</u>: Dato un polinomio $P(x)$ nella variabile x l'equazione:

$$P(x) = 0$$

è un' <u>equazione ~~di~~ polinomiale</u> o <u>algebrica</u> di <u>grado</u> pari al grado di $P(x)$, denotato con $\deg P(x)$.
Quando $\deg P(x) > 4$ non esiste una formula risolutiva per l'incognita x esprimibile tramite radicali.
Vediamo esercizi su equazioni (e disequazioni) di I, II grado, e di grado superiore ma riconducibili a eq. di I e II grado.

~~ES: $x+1 = 2x^2$~~

Ricordiamo che le eq. di II grado hanno forma generale $ax^2+bx+c=0$, con $a \neq 0$ (altrimenti l'eq. è di grado inferiore). Il numero di soluzioni dipende dal cosidetto <u>discriminante</u> $\Delta := b^2-4ac$; abbiamo infatti i 3 casi:

Δ
- $>0 \Rightarrow \exists\, 2$ soluzioni reali date dalla formula $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
- $=0 \Rightarrow \exists!$ soluzione reale (a volte si dice "esiste ed è unica" o "esiste un' unica" $\exists\, 2$ soluzioni coincidenti) data da $x = \dfrac{-b}{2a}$
- $<0 \Rightarrow \nexists$ soluzioni reali (per curiosità: esistono 2 soluzioni appartenenti al campo dei numeri complessi $\mathbb{C} \supseteq \mathbb{R}$).

<u>ES</u>: $x+1 = 2x^2$

L'equazione ~~si~~ può essere ricondotta nella forma generale.

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

Calcoliamo il discriminante: $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 1 + 8 = 9 > 0$
Essendo $\Delta > 0$ abbiamo 2 soluzioni reali date da:

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{1+3}{4} = 1 = x_1 \\ \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2} = x_2 \end{cases}$$

$\therefore$ Le due soluzioni sono $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{1}{2}$

<u>ES</u>: Studiare le soluzioni di $3x^2 + 2x = -c$ al variare di c in $\mathbb{R}$.

Riconduciamo l'equazione nella forma generale:

$$E: 3x^2 + 2x + c = 0$$

Questa è un'equazione di II grado con termine noto dato da un parametro reale. Il discriminante dell'eq. è:

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot c = 4 - 12c$$

Sappiamo che l'equazione E ha $\begin{cases} 2 \text{ soluzioni} & \cdot \text{ se } \Delta > 0 \\ 1 \text{ soluzione} & \cdot \text{ se } \Delta = 0 \\ 0 \text{ soluzioni} & \cdot \text{ se } \Delta < 0 \end{cases}$

- $\Delta > 0 \iff 4 - 12c > 0 \iff c < \frac{1}{3}$

  In questo caso le 2 soluzioni distinte sono date da

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-12c}}{6} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{1-3c}}{6} = \begin{cases} \frac{-1+\sqrt{1-3c}}{3} = x_1 \\ \frac{-1-\sqrt{1-3c}}{3} = x_2 \end{cases}$$

- $\Delta = 0 \iff 4 - 12c = 0 \iff c = \frac{1}{3}$

  In questo caso l'unica soluzione è data da:

$$x = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

- $\Delta < 0 \iff 4 - 12c < 0 \iff c > \frac{1}{3}$

  In questo caso l'equazione E non ammette soluzioni.

<u>ES</u>: Trovare le soluzioni di:

$$\sqrt{3x+4} = x$$

L'espressione a sinistra dell'uguaglianza ha senso se il radicando è non negativo, cioè se $3x + 4 \geq 0$,

$3x \geq -4 \iff x \geq -\frac{4}{3}$

Applichiamo l'elevamento alla potenza 2 a entrambi i membri dell'equazione, ottenendo l'equazione (non equivalente):

$$3x+4 = x^2 \iff x^2-3x-4=0 \quad (*)$$

Il discriminante di tale equazione è: $\Delta = 9+16 = 25 > 0$
$\Rightarrow \exists$ 2 radici reali distinte date da:

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 4 = x_1 \\ -1 = x_2 \end{cases}$$

La soluzione $x_2 = -1$ di $(*)$ è da escludere in quanto non soddisfa l'equazione originale.
$x_1 = 4$ è invece soluzione effettiva: $\sqrt{3 \cdot 4 + 4} = 4$

<u>ES:</u> $\frac{x^2}{x+1} = -1 + \frac{7}{x+1}$

L'equazione equivale a: $\frac{x^2}{x+1} + 1 - \frac{7}{x+1} = 0 \iff$

$$\frac{x^2}{x+1} + \frac{x+1}{x+1} - \frac{7}{x+1} = 0$$

$$\frac{x^2+x+1-7}{x+1} = 0$$

$$\frac{x^2+x-6}{x+1} = 0 \quad \text{con condizione d'esistenza } x+1 \neq 0$$

che è un'equazione fratta di II grado. La frazione è nulla se e solo se il numeratore è nullo:

$$N(x) = x^2+x-6 = 0$$

Abbiamo: $\Delta = 1+24 = 25 > 0 \Rightarrow \exists 2$ ~~soluzioni~~ radici

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 2 = x_1 \\ -3 = x_2 \end{cases}$$

Siccome x_1 e x_2 soddisfano la condizione d'esistenza

$x \neq -1$ sono entrambe soluzioni dell'equazione.

<u>ES:</u> $\log_{10}^2 x + \log_{10} x^2 = 3$

[<u>OSS</u>: $\log^n x = (\log x)^n$]

L'espressione a sinistra ha senso se $x > 0$.
Applichiamo una nota proprietà del logaritmo:

$$(\log_{10} x)^2 + 2\log_{10} x = 3$$

che equivale a: $(\log_{10} x)^2 + 2\log_{10} x - 3 = 0$

Mediante la sostituzione $t = \log_{10} x$ otteniamo:

$$t^2 + 2t - 3 = 0$$

che riconosciamo facilmente come equazione di II grado.

$$\Delta = 4 + 12 = 16 > 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 1 = t_1 \\ -3 = t_2 \end{cases}$$

Riapplichiamo la sostituzione al contrario ottenendo:

$$x_1 = 10^{t_1} = 10$$
$$x_2 = 10^{t_2} = 10^{-3} = 0{,}001$$

poiché $t = \log_{10} x \iff 10^t = x$.

<u>ES:</u> $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

Ricordiamo il

[<u>TEO</u>: (di Ruffini)
Un polinomio $P(x)$ è divisibile per $(x-\alpha)$, cioè $\exists$ un polinomio $Q(x)$: $P(x) = Q(x)\cdot(x-\alpha)$, se e solo se $P(\alpha) = 0$ cioè $P(x) =$ dove ho sostituito α ad x.]

Il polinomio $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ si annulla per $x = 1$, infatti:

$$P(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 - 6 = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$$

Quindi per il Teo. di Ruffini $P(x)$ è divisibile per $(x-1)$, cioè $\exists\, Q(x) : P(x) = Q(x) \cdot (x-1)$.

I coefficienti di $Q(x)$ sono ricavabili con la Regola di Ruffini:

α	1	-6	11	-6
1		1	-5	6
	1	-5	6	0

coefficienti di $P(x)$

resto della divisione di $P(x)$ per $(x-\alpha)$

coefficienti del quoziente $Q(x)$

$Q(x) = x^2 - 5x + 6$

Abbiamo quindi la fattorizzazione $P(x) = Q(x)(x-\alpha)$:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x^2 - 5x + 6)(x-1)$$

Per il Principio di Annullamento del Prodotto (un prodotto è nullo sse uno qualunque dei fattori è nullo) le radici di $P(x)$ sono l'unione delle radici di $(x-1)$ con le radici di $Q(x)$:

$$Q(x) = x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\Delta = 25 - 24 = 1 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 = x_1 \\ 2 = x_2 \end{cases}$$

Quindi le radici di $P(x)$ sono $\{1, 2, 3\}$, che corrispondono alle soluzioni dell'equazione.

ES: ~~4.33~~ $\sqrt{2x-1}+\sqrt{8x-5}=0$

L'espressione a sinistra ha senso se $2x-1\geq 0$ e $8x-5\geq 0$.

$$\left.\begin{array}{l} 2x-1\geq 0 \iff 2x\geq 1 \iff x\geq \frac{1}{2} \\ 8x-5\geq 0 \iff 8x\geq 5 \iff x\geq \frac{5}{8} \end{array}\right\} \iff x\geq \frac{5}{8}$$

Quindi la condizione d'esistenza è $x\geq \frac{5}{8}$.

Applichiamo il prodotto notevole: $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

$$\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{8x-5}\right)\left(\sqrt{2x-1}-\sqrt{8x-5}\right)=0$$

$$\left(\sqrt{2x-1}\right)^2-\left(\sqrt{8x-5}\right)^2=0$$

Le soluzioni vanno quindi cercate tra quelle di:

$$2x-1-(8x-5)=0$$

$$2x-1-8x+5=0$$

$$-6x+4=0$$

$$\Downarrow$$

$$x=\frac{2}{3}$$

Verifichiamo che soddisfi la condizione d'esistenza:

$$\frac{5}{8}\ ;\ \frac{2}{3}$$

$$\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\cdot\frac{8}{8}$$

$$\frac{15}{24}\ ;\ \frac{16}{24}$$

Siccome $\frac{15}{24}\leq\frac{16}{24} \iff \frac{5}{8}\leq\frac{2}{3}$ abbiamo che $x=\frac{2}{3}$ è soluz.