ES: 3.57 XI) Risolvere la disequazione irrazionale

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2-9}} \leq 1$$

OSS: La condizioni d'esistenza dell' espressione a sinistra ~~destra~~ è

$$CE: \; x^2-9>0$$

che è soddisfatta per $x^2>9$ cioè

$$x < -3 \quad \text{oppure} \quad x>3.$$

Siccome $\sqrt{\dots}$ è positivo possiamo riscrivere la disequazione come:

$$x+1 \leq \sqrt{x^2-9} \qquad (*)$$

avendo moltiplicato entrambi i membri per $\sqrt{x^2-9}$.
Se il membro sinistro di $(*)$ è negativo la disequazione è soddisfatta per tutti i valori ammessi dalla CE. Mentre se è positivo possiamo sfruttare la regola deduttiva:

$$0 \leq A \leq B \implies A^2 \leq B^2,$$

che applicata dà $(x+1)^2 \leq x^2-9$.
In sintesi le soluzioni della disequazione data sono l'unione delle soluzioni ~~del~~ dei sistemi:

$$S_1: \begin{cases} CE \\ x+1<0 \end{cases} \qquad S_2: \begin{cases} CE \\ x+1 \geq 0 \\ (x+1)^2 \leq x^2-9 \end{cases}$$

- S_1 ha come soluzioni $x<-3$
- S_2 si riduce a $\begin{cases} x>3 \\ x^2+2x+1 \leq x^2-9 \end{cases} \iff \begin{cases} x>3 \\ 2x \leq -10 \end{cases}$

che è impossibile, cioè non ammette soluzioni.

$\therefore$ Tutte e sole le soluzioni della disequazione sono

$$x < -3.$$

<u>ES:</u> 3.60 IV) Risolvere la disequazione trigonometrica

$$(\cos x)^2 + 2 \operatorname{sen} x - 1 \geq 0.$$

Utilizziamo la nota ~~disuguaglianza~~ identità di Pitagora

$$(\cos x)^2 + (\operatorname{sen} x)^2 = 1$$

ottenendo:

$$1 - (\operatorname{sen} x)^2 + 2 \operatorname{sen} x - 1 \geq 0$$

$$-(\operatorname{sen} x)^2 + 2 \operatorname{sen} x \geq 0$$

Raccogliamo sen x:

$$\operatorname{sen} x \, (-\operatorname{sen} x + 2) \geq 0$$

L'espressione è della forma $A \cdot B$, con $A = \operatorname{sen} x$ e $B = -\operatorname{sen} x + 2$, che è ≥ 0 se e solo se:

$$A, B \geq 0 \quad \text{oppure} \quad A, B \leq 0.$$

Studiamo quindi il segno di A e B.

- $A = \operatorname{sen} x \geq 0 \iff x \in [0, \pi]$, oppure $x \in [3\pi, 4\pi]$, oppure ...

$$\iff x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2\pi k, 2\pi k + \pi]$$

- $B = -\operatorname{sen} x + 2 \geq 0 \iff \operatorname{sen} x \leq 2$ soddisfatta (con <) in tutto $\mathbb{R}$.

Il diagramma del segno di $A \cdot B$ è:

Il segno è quindi determinato da A, e la disequazione data ha soluzioni:

$$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2\pi k, 2\pi k + \pi] = \ldots \cup [-2\pi, -\pi] \cup [0, \pi] \cup [2\pi, 3\pi] \cup \ldots$$

<u>ES</u>: Determinare il dominio della funzione data dall'espressione:

$$\sqrt{\log \frac{\sqrt{x^2}}{x-1}}$$

<u>OSS</u>: In generale l'uguaglianza $\sqrt{x^2} = x$ è falsa (si può verificare con $x < 0$), quindi non si può applicare semplicemente la sostituzione $x \to \sqrt{x^2}$

Affinché l'espressione abbia senso devono verificarsi congiuntamente le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} x - 1 \neq 0 & \text{I} \\ \dfrac{\sqrt{x^2}}{x-1} > 0 & \text{II} \\ \log \dfrac{\sqrt{x^2}}{x-1} \geq 0 & \text{III} \end{cases}$$

I : $x \neq 1$

II : Premesso che $x \neq 1$ possiamo studiare il segno di $\dfrac{\sqrt{x^2}}{x-1}$

- $\sqrt{x^2} > 0 \iff x \neq 0$
- $x - 1 > 0 \iff x > 1$

Quindi II è soddisfatta per $x > 1$.

III : In virtù di I e II possiamo considerare III solo per $x > 1$. In tal caso $\sqrt{x^2} = x$, e quindi:

$$\log \frac{\sqrt{x^2}}{x-1} = \log \frac{x}{x-1} \geq 0 \iff \frac{x}{x-1} \geq 1$$

Moltiplichiamo ambo i membri per $x-1$ senza cambiare segno della disuguaglianza in quanto $x>1$:

$$x \geq x-1 \iff 0 \geq -1$$

che è vera per ogni x, in particolare per $x>1$.
In conclusione il sistema ha soluzioni $x>1$ e quindi il dominio della funzione è $(1,+\infty)$.

ES: Determinare il dominio della funzione data dall'espressione:

$$\frac{\sqrt{x-2}}{\cos \log \frac{1}{x} - 1}$$

Le condizioni di esistenza sono espresse dal seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} x-2 \geq 0 & \text{I} \\ x \neq 0 & \text{II} \\ \frac{1}{x} > 0 & \text{III} \\ \cos \log \frac{1}{x} - 1 \neq 0 & \text{IV} \end{cases}$$

La disequazione III equivale a $x>0$ e la I equivale a $x \geq 2$; quindi la II e la III sono sussunti dalla I: $x \geq 2$.
Con $x \geq 2$ abbiamo:

$$\cos \log \frac{1}{x} = 1 \iff \log \frac{1}{x} = 2\pi k \text{ per qualche } k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff \frac{1}{x} = e^{2\pi k} \iff x = e^{-2\pi k} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Il sistema di disequazioni si riconduce quindi a:

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x \neq e^{-2\pi k} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Il dominio della funzione è quindi:

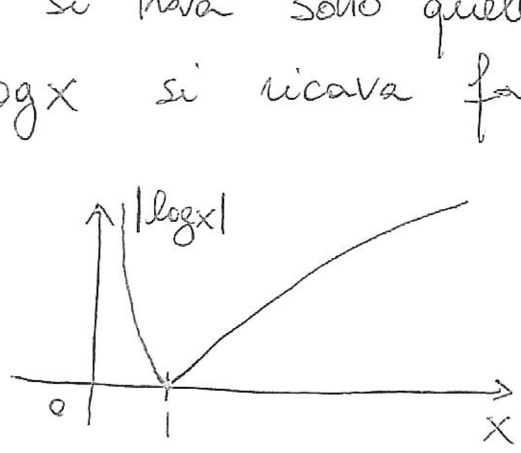
$$\{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\} \setminus \{e^{-2\pi k} \in \mathbb{R} : k \in \mathbb{Z}\} =$$

$$= [2, e^{2\pi}) \cup (e^{2\pi}, e^{4\pi}) \cup (e^{4\pi}, e^{6\pi}) \cup \dots$$

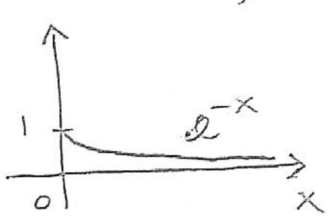
<u>ES</u>: Risolvere graficamente la disequazione:

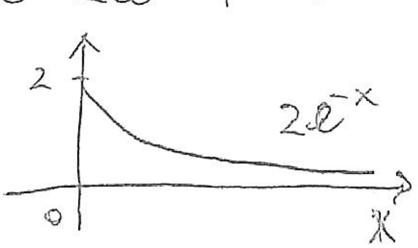
$$|\log x| - \frac{2e^{-x}-1}{3} \leq 0$$

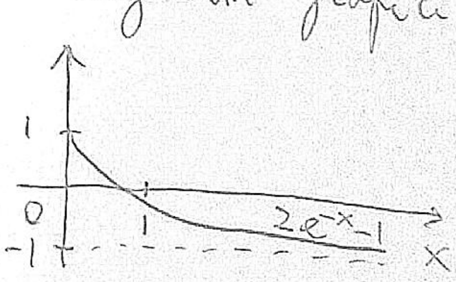
Prima di tutto osserviamo che l'espressione a sinistra ha senso per $x > 0$.
~~Dal~~ La domanda equivale a chiedere quando il grafico di $|\log x|$ si trova sotto quello di $\frac{2e^{-x}-1}{3}$.
Dal grafico di $\log x$ si ricava facilmente quello di $|\log x|$:



Per e^{-x}, $2e^{-x}$ e $2e^{-x}-1$ abbiamo i seguenti grafici:



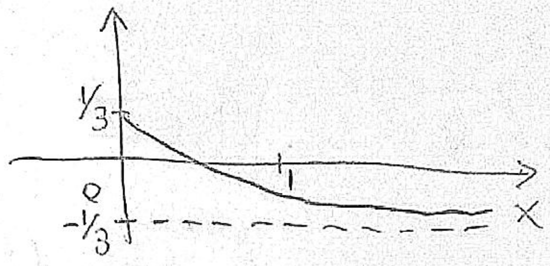




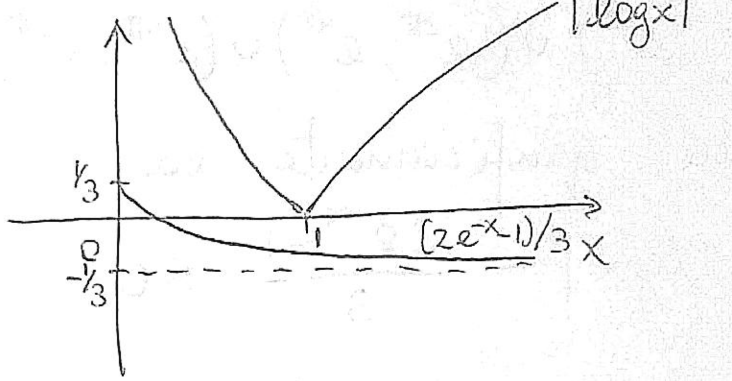
In particolare il valore di $2e^{-x}-1$ in $x = 1$ è

$$2e^{-1} - 1 = \frac{2}{e} - 1 < 0$$

Il grafico di $\frac{2e^{-x}-1}{3}$ ha la seguente forma:



Disegnando le due funzioni nello stesso grafico abbiamo:



da cui è evidente che $\frac{2e^{-x}-1}{3}$ è sempre sotto $|\log x|$ e quindi la disequazione non ammette alcuna soluzione.