ES: 7.25 III) $\lim_{x \to 6} \frac{2-\sqrt{x-2}}{x^2-36} = ?$

Osserviamo che il denominatore si può scomporre in fattori tramite il prodotto notevole: $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$. Abbiamo:

$$\lim_{x \to 6} \frac{2-\sqrt{x-2}}{(x+6)(x-6)}$$

Razionalizziamo il numeratore applicando lo stesso prodotto notevole:

$$\lim_{x \to 6} \frac{2-\sqrt{x-2}}{(x+6)(x-6)} \cdot \frac{2+\sqrt{x-2}}{2+\sqrt{x-2}} = \lim_{x \to 6} \frac{4-(x-2)}{(x+6)(x-6)(2+\sqrt{x-2})} =$$

$$= \lim_{x \to 6} \frac{-(x-6)}{(x+6)(x-6)(2+\sqrt{x-2})} = \lim_{x \to 6} \frac{-1}{(x+6)(2+\sqrt{x-2})}$$

cancellazione del fattore
$(x-6)$ a numeratore e denominatore

Siccome $\lim_{x \to 6}(-1)$ e $\lim_{x \to 6}(x+6)(2+\sqrt{x-2})$ sono finiti e non nulli possiamo applicare il TEO. punto d. a pag. 156 del Giusti:

$\lim_{x \to p} f(x) \neq 0, \infty$ e $\lim_{x \to p} g(x) \neq 0, \infty$

$$\Rightarrow \lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to p} f(x)}{\lim_{x \to p} g(x)}$$

Quindi abbiamo:

$$\lim_{x \to 6} \frac{-1}{(x+6)(2+\sqrt{x-2})} = \frac{-1}{\lim_{x \to 6}(x+6)(2+\sqrt{x-2})} = \frac{-1}{48}.$$

<u>ES</u>: 8.1 V) $f(x) = 2e^x + \operatorname{sen} x$, $f'(x) = ?$

Dalla regola di derivazione di una somma (Guerraggio, p.189)

$$D[2e^x + \operatorname{sen} x] = D[2e^x] + D[\operatorname{sen} x] = 2 \cdot D[e^x] + D[\operatorname{sen} x]$$

Dalla tabella delle derivate delle funzioni elementari sappiamo

$$D[e^x] = e^x$$

$$D[\operatorname{sen} x] = \cos x$$

quindi $f'(x) = D[2e^x + \operatorname{sen} x] = 2e^x + \cos x$.

<u>ES</u>: 8.2 VI) $f(x) = \sqrt{x} \cos x$, $f'(x) = ?$

Applichiamo la regola di derivazione di un prodotto:

$$f'(x) = D[\sqrt{x}] \cos x + \sqrt{x} \cdot (-\operatorname{sen} x) = D[x^{\frac{1}{2}}] \cos x - \sqrt{x} \operatorname{sen} x$$

$$= \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \cos x - \sqrt{x} \operatorname{sen} x = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos x - \sqrt{x} \operatorname{sen} x .$$

<u>ES</u>: 8.5 III) $f(x) = \log \left(\frac{x+3}{x-3}\right)^2$, $f'(x) = ?$

Applichiamo una proprietà del logaritmo: $\log a^b = b \log a$.

$$f'(x) = D\left[2 \log \frac{x+3}{x-3}\right] = 2 D\left[\log \frac{x+3}{x-3}\right]$$

Dalla regola di derivazione della funzione composta abbiamo:

$$D\left[\log \frac{x+3}{x-3}\right] = \frac{1}{\frac{x+3}{x-3}} D\left[\frac{x+3}{x-3}\right] = \frac{1}{\frac{x+3}{x-3}} \cdot \frac{1 \cdot (x-3) - (x+3) \cdot 1}{(x-3)^2} =$$

$$= \frac{x-3}{x+3} \frac{x-3-x-3}{(x-3)^2} = \frac{(x-3) \cdot (-6)}{(x+3)(x-3)^2} = \frac{-6}{(x+3)(x-3)}$$

Quindi $f'(x) = -\frac{12}{x^2-9}$

ES: 8.12 Scrivere l'equazione della tangente a
$f(x) = x^2 \log x$ in $x_0 = 1$.

Una retta (non verticale) ha equazione $y = mx + q$.

Dall'interpretazione geometrica della derivata sappiamo che la retta tangente a $f(x)$ in un punto x_0 ha coefficiente angolare pari alla derivata valutata in x_0:

$$m = f'(x_0)$$

Per determinare q dobbiamo imporre che la retta tangente passi per il punto di tangenza (x_0, y_0) con $y_0 = f(x_0)$.

1. Determiniamo m:

$$f'(x) = 2x \log x + x^2 \frac{1}{x} = 2x \log x + x$$

$$m = f'(x_0) = f'(1) = 2 \cdot 1 \cdot \log 1 + 1 = 0 + 1 = 1$$

2. Imporre il passaggio per (x_0, y_0) significa che la retta deve verificare $y = y_0$ con $x = x_0$, cioè:

$$y_0 = m x_0 + q$$

Calcoliamo $y_0 = f(x_0) = 1^2 \log 1 = 0$. Abbiamo quindi:

$$0 = 1 \cdot 1 + q$$

cioè $q = -1$.

$\therefore$ La retta tangente ha equazione:

$$y = 1 \cdot x + (-1) = x - 1$$

ES: 8.26 Determinare $a > -1$, $b \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + b & . \ x < 1 \\ \log(x+a) & . \ x \geq 1 \end{cases}$$

sia continua e derivabile in $\mathbb{R}$.

$f(x)$ è continua e derivabile per $x \neq 1$ poiché lo sono x^3+b e $\log(x+a)$ nei loro domini di definizione.

1. Affinché $f(x)$ sia continua è allora sufficiente:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1) = \lim_{x \to 1^+} f(x)$$

Abbiamo $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^3+b) = 1+b$

e $f(1) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \log(x+a) = \log(1+a)$

Quindi deve essere: $1+b = \log(1+a)$.

2. Affinché $f(x)$ sia derivabile è sufficiente:

$$f'_-(1) = f'_+(1)$$

Abbiamo $D[x^3+b] = 3x^2 \Rightarrow f'_-(1) = 3 \cdot 1^2 = 3$

e $D[\log(x+a)] = \frac{1}{x+a} \Rightarrow f'_+(1) = \frac{1}{1+a}$

La condizione di derivabilità è quindi:

$$3 = \frac{1}{1+a} \quad \text{cioè} \quad a = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$$

Dalla condizione di continuità abbiamo:

$$1+b = \log\left(1 - \frac{2}{3}\right) \quad \text{cioè} \quad b = \log\frac{1}{3} - 1$$

ES: 8.5 v) $f(x) = \operatorname{sen} x \, e^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$ $\quad f'(x) = ?$

L'operazione più esterna è il prodotto: $(\operatorname{sen} x)(e^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}})$
quindi applichiamo la Regola di derivazione del prodotto:

$$(hg)' = h'g + hg'$$

ottenendo:

$$f'(x) = \cos x \, e^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} + \cancel{\operatorname{sen} x \, e^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}} \operatorname{sen} x \cdot D\left[e^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}\right]$$

La derivata $D\left[e^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}\right]$ si ottiene con la Regola di derivazione della funzione composta:

$$D\left[h(g(x))\right] = h'(g(x)) \cdot g'(x)$$

identificando: $h(g(x)) = e^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$ con $h(y) = e^y$
$g(x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$

Abbiamo quindi: $D\left[e^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}\right] = e^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} \cdot D\left[\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right] =$

$$= e^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} \cdot \frac{0 - \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = -e^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$f'(x) = \cos x \, e^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} - \operatorname{sen} x \, e^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = \cos x \, e^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} - e^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

$$= e^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} \left[\cos x - \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right]$$