24/10/12 ESERCITAZIONI DI MATEMATICA (E.C.E.) 1

ES: 7.43 II) Determinare gli asintoti di
$$f(x) = \frac{\log x}{\log x - 2}$$

- Per trovare gli asintoti orizzontali o obliqui dobbiamo studiare la funzione f per $x \to \pm\infty$.
- Per trovare gli asintoti verticali dobbiamo studiare la funzione f per x tendente agli estremi (finiti) degli intervalli in cui è definita f.

Determiniamo prima le condizioni di esistenza, cioè il dominio, di $f(x)$:

C.E.: $\cdot\ x > 0$

$\cdot\ \log x - 2 \neq 0 \iff \log x \neq 2 \iff x \neq e^2$

Quindi il dominio di $f(x)$ è:
$$\mathcal{D}f = (0, e^2) \cup (e^2, +\infty)$$
Gli estremi sono quindi $0^+, (e^2)^-, (e^2)^+$

$$- \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\log x}{\log x - 2} \underset{\uparrow}{=} \cancel{\lim_{x \to 0^+} \frac{\log x}{\log x}} = 1^-$$

essendo $\log x$ un infinito dello stesso ordine di ~~di ordine superiore a (-2)~~ $\log x - 2$ per $x \to 0^+$

L'ultimo limite risulta per difetto in quanto $\frac{\log x}{\log x - 2} < 1$ per ogni x : $0 < x < 1$.

$$- \lim_{x \to (e^2)^-} f(x) = \lim_{x \to (e^2)^-} \frac{\log x}{\log x - 2} = \frac{(\log e^2)^-}{(\log e^2)^- - 2} = \frac{2^-}{2^- - 2} = \frac{2^-}{0^-} = -\infty$$

$$- \lim_{x \to (e^2)^+} f(x) = \lim_{x \to (e^2)^+} \frac{\log x}{\log x - 2} = \frac{(\log e^2)^+}{(\log e^2)^+ - 2} = \frac{2^+}{2^+ - 2} = \frac{2^+}{0^+} = +\infty$$

Quindi dagli ultimi 2 limiti abbiamo l'asintoto $x = 2$.

$$- \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{\log x - 2} \underset{\uparrow}{=} 1^+$$

essendo $\log x$ e $\log x - 2$ infiniti dello stesso ordine per $x \to +\infty$

L'ultimo limite risulta per eccesso in quanto

$\frac{\log x}{\log x - 2} > 1$ per ogni $x : e^2 < x$.

Dall'ultimo limite abbiamo l'asintoto $y = 1$.
Non cerchiamo asintoti per $x \to -\infty$ in quanto f non è definito per $x < 0$.

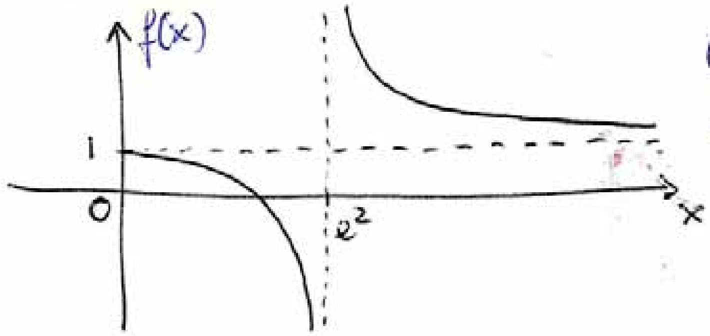


Grafico qualitativo di $f(x)$.

ES: 9.5 III) Applicando il Teo. di De L'Hôpital, calcolare:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x + x^2}{2x + x^2 \cos x}$$

Riconosciamo la forma d'indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$. Utilizziamo quindi il primo teo. di De L'Hôpital.
È utile ricordare che:

OSS: Somma e prodotto di funzioni derivabili in un insieme I sono funzioni derivabili in I.

1) $N(x) = \operatorname{sen} x + x^2$ e $D(x) = 2x + x^2 \cos x$ sono derivabili in un intorno I_0 di $x_0 = 0$ in quanto
- $\operatorname{sen} x$, x^2 sono derivabili (in I_0) $\Rightarrow$ $\operatorname{sen} x + x^2$ derivabile (in I_0)
- x^2, $\cos x$ derivabili $\Rightarrow$ $x^2 \cos x$ derivabile
- $2x$, $x^2 \cos x$ derivabile $\Rightarrow$ $2x + x^2 \cos x$ derivabile.

È possibile scegliere l'intorno I_0 di $x_0 = 0$ in modo che $D(x) \neq 0$ e $D'(x) \neq 0$ $\forall x \in I_0$. Infatti:
- $D(x) \neq 0 \iff -2x \neq x^2 \cos x$ che è soddisfatta per x abbastanza vicino a $x_0 = 0$.
- $D'(x) \neq 0 \iff 2 + 2x \cos x + x^2(-\operatorname{sen} x) \neq 0$ che è soddisfatta per x abbastanza vicino a $x_0 = 0$

2) $N(x_0) = N(0) = \text{sen}\, 0 + 0 = 0$

$D(x_0) = D(0) = 0 + 0 \cdot 1 = 0$

3) $N'(x) = \cos x + 2x$

$D'(x) = 2 + 2x \cos x + x^2(-\text{sen}\, x)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{N'(x)}{D'(x)} = \frac{1 + 2 \cdot 0}{2 + 2\cdot 0 \cdot 1 - 0 \cdot 0} = \frac{1}{2}$$

Quindi applicando il primo Teo. di De L'Hôpital abbiamo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{N(x)}{D(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{N'(x)}{D'(x)} = \frac{1}{2}$$

ES: 9.27 Determinare gli intervalli di crescita e decrescita di

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 10x + 9 & \text{se } x < 0 \\ 3 \log_3(x+27) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Denotiamo i due rami con: $f_1(x) = x^2 + 10x + 9$ e $f_2(x) = 3\log_3(x+27)$

1) $f_1(x)$ è sempre definita e derivabile, in particolare lo è per $x < 0$.
Per determinare dove è crescente dobbiamo porre $f_1'(x) \geq 0$.

$f_1'(x) = 2x + 10 \geq 0 \iff x \geq -5$

Quindi f_1 decresce per $x < -5$, ha un punto stazionario in $x = -5$ e cresce per $x > -5$.

2) $f_2(x)$ è definita e derivabile per $x \geq 0$.
Per determinare dove è crescente dobbiamo porre $f_2'(x) \geq 0$.

$f_2'(x) = \frac{3}{\log 3} \frac{1}{x+27} \cdot D[x+27] =$

$= \frac{3/\log 3}{x+27} \geq 0$

RIC: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

$\Rightarrow \log_3(x+27) = \frac{\log(x+27)}{\log 3}$

$f_2'(x) > 0 \iff x > -27$

In particolare f_2 è crescente in tutto il suo insieme di definizione $x \geq 0$.

Diagramma di crescita e decrescita

	-5		0		x
$f(x)$	$\searrow$	$\bullet$	$\nearrow$	|	$\nearrow$

f decresce per $x<-5$, ha punto stazionario in $x=-5$, cresce per $-5<x<0$ e per $x>0$. Dobbiamo verificare che $\lim_{x\to 0^-} f(x) \leq f(0)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x^2+10x+9) = 9 \\ f(0) = 3 \log_3 27 = 3\cdot 3 = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x) \leq f(0)$$

$\therefore$ Possiamo concludere che

$$f(x) \text{ è } \begin{cases} \text{decrescente} & x<-5 \\ \text{stazionario} & x=-5 \\ \text{crescente} & x>-5 \end{cases}$$

<u>ES:</u> 9.34 II) Studiare l'andamento di:

$$f(x) = \frac{5x^2-2x}{e^x}$$

1. Studiamo il dominio
   Il denominatore deve essere non nullo: $D(x) = e^x \neq 0$
   Ma $\forall x \in \mathbb{R}: e^x > 0 \Rightarrow f$ è definito su tutto $\mathbb{R}$.
   $$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$$
2. Simmetrie
   E' facile verificare che f non è pari; basta trovare un $x_0 \in \mathbb{R}: f(x_0) \neq f(-x_0)$. Ad esempio $x_0 = 1$:
   $$f(1) = \frac{5-2}{e} = 3e^{-1}$$
   $$f(-1) = \frac{5+3}{e^{-1}} = 8e$$
   E' facile verificare che f non è dispari: $\exists x_0 \in \mathbb{R}$: $f(-x_0) \neq -f(x_0)$
   $$f(-1) = 8e$$
   $$-f(1) = -3e^{-1}$$

3. Intersezioni con gli assi cartesiani.
Gli assi cartesiani hanno equazione $y=0$ e $x=0$, quindi basta effettuare queste sostituzioni per trovare la coordinata rimanente.

$$\begin{cases} y = \dfrac{5x^2-2x}{e^x} \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{0}{1} = 0 \ : \ P_1 = (0,0)$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{5x^2-2x}{e^x} \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{5x^2-2x}{e^x} = 0 \iff x(5x-2)=0 \iff \begin{cases} x=0 \\ \text{oppure} \\ x=\frac{2}{5} \end{cases}$$

$P_2 = (0,0)$

$P_3 = \left(\frac{2}{5}, 0\right)$

4. Segno della funzione f.

$$f(x) \geq 0 \iff \frac{5x^2-2x}{e^x} \geq 0$$

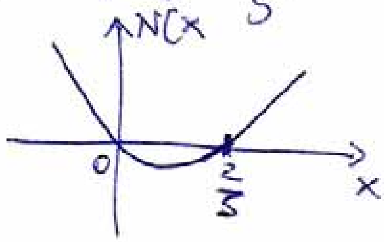
$D(x) = e^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, quindi $f(x) \geq 0 \iff N(x) = 5x^2-2x \geq 0$

Cioè: $x(5x-2) \geq 0$. $N(x)$ ha radici $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2}{5}$

$N(x) \geq 0$ per $x \leq 0$ oppure $x \geq \frac{2}{5}$

$\Updownarrow$

$f(x) \geq 0$ per $x \leq 0$ oppure $x \geq \frac{2}{5}$



$$f(x) = \begin{cases} \text{positivo} & \cdot\ x<0 \text{ e } x>\frac{2}{5} \\ \text{nullo} & \cdot\ x=0 \text{ e } x=\frac{2}{5} \\ \text{negativo} & \cdot\ 0<x<\frac{2}{5} \end{cases}$$

5. Limiti e asintoti
Il dominio di f ha estremi non finiti $\pm\infty$ ed $\underbrace{\text{è}}_{f}$ una funzione continua, quindi non ha asintoti verticali. Cerchiamo quelli orizzontali e obliqui.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{5x^2-2x}{e^x} = 0$$ essendo e^x un infinito di ordine superiore!

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{5x^2-2x}{e^x} = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty$$

Quindi f potrebbe avere un asintoto obliquo per $x\to-\infty$.

Tale asintoto esiste sse:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = K \quad \text{con } K \neq 0, \infty$$

Abbiamo

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{5x^2-2x}{xe^x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{5x-2}{e^x} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty.$$

cancellazione del fattore non nullo x

Quindi non esiste asintoto obliquo per $x\to-\infty$, ma solo un asintoto orizzontale di equazione $y=0$ per $x\to+\infty$. Inoltre $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$ in quanto $f(x)>0$ per $x>\frac{2}{5}$, quindi f tende a $y=0$ da sopra.

6. Massimi e minimi.

f è derivabile su tutto $\mathbb{R}$ e la sua derivata vale:

$$f'(x) = \frac{(10x-2)e^x-(5x^2-2x)e^x}{e^{2x}} = \frac{10x-2-5x^2+2x}{e^x} =$$

$$= \frac{-5x^2+12x-2}{e^x}$$

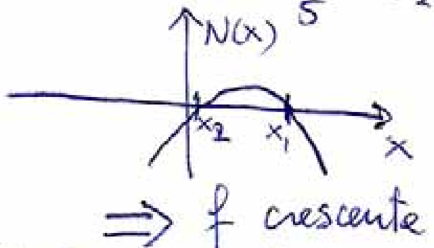
$D(x) = e^x > 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$f'(x) \gtrless 0 \iff N(x) = -5x^2+12x-2 \gtrless 0$

Le radici di N sono:

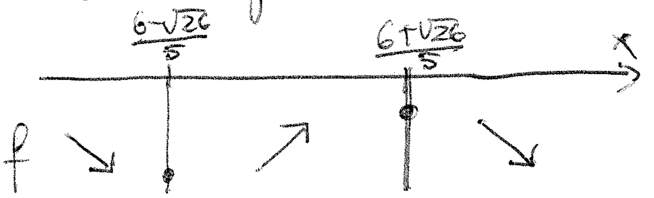
$$x = \frac{-12\pm\sqrt{144-40}}{-10} = \frac{-12\pm2\sqrt{26}}{-10} = \begin{cases} \frac{6+\sqrt{26}}{5} = x_1 \\ \frac{6-\sqrt{26}}{5} = x_2 \end{cases}$$

x		x_2		x_1	
$N(x)$	- - - -		——		- - - - - - -
$D(x)$	——		——		——
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$



$$f'(x) = \begin{cases} \text{positivo} & \cdot\ \frac{6-\sqrt{26}}{5} < x < \frac{6+\sqrt{26}}{5} \implies f \text{ crescente} \\ \text{nullo} & \cdot\ x = \frac{6-\sqrt{26}}{5} \text{ oppure } x = \frac{6+\sqrt{26}}{5} \implies f \text{ stazionaria} \\ \text{negativo} & \cdot\ x < \frac{6-\sqrt{26}}{5} \text{ oppure } x > \frac{6+\sqrt{26}}{5} \implies f \text{ decrescente} \end{cases}$$

Per determinare min e max guardiamo i punti stazionari nel diagramma:



Siccome f decresce prima di x_2 e cresce dopo x_2, il punto stazionario $x_2 = \frac{6-\sqrt{26}}{5}$ è punto di minimo.
Siccome f cresce prima di x_1 e decresce dopo x_1, il punto stazionario $x_1 = \frac{6+\sqrt{26}}{5}$ è punto di massimo.

7. f è ovunque derivabile (cioè $\forall x \in \mathbb{R}$).

8. Punti di flesso

f è derivabile 2 volte e la sua derivata II vale:

$$f''(x) = D[f'(x)] = \frac{(-10x+12)e^x - (-5x^2+12x-2)e^x}{e^{2x}} =$$

$$= \frac{-10x+12+5x^2-12x+2}{e^x} = \frac{5x^2-22x+14}{e^x}$$

I punti di flesso sono quei punti con un intorno sinistro nel quale f è concava e un intorno destro nel quale f è convessa, o viceversa.

Per il Teo. di pag. 231 del Guenaggio:

$$f \text{ è } \begin{Bmatrix} \text{convessa} \\ \text{concava} \end{Bmatrix} \text{ in } I \iff \forall x \in I \begin{cases} f''(x) \geq 0 \\ f''(x) \leq 0 \end{cases}$$

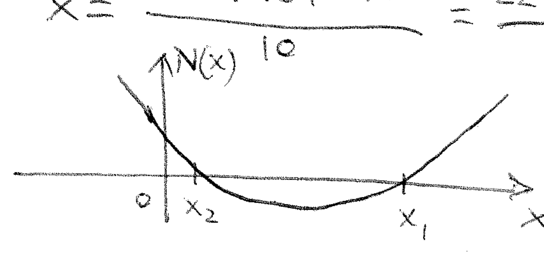
Quindi determiniamo le $x : f''(x) \geq 0$.

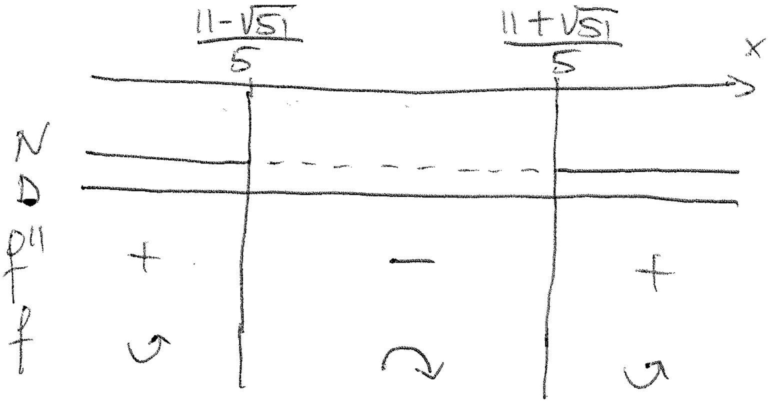
$D(x) = e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$N(x) = 5x^2 - 22x + 14 \geq 0$

Le radici di N sono: $x = \frac{22 \pm \cancel{\sqrt{484-140}}\ \sqrt{484-280}}{10} = \frac{22 \pm 2\cancel{\sqrt{86}}\ \sqrt{51}}{10} =$

$$= \begin{cases} \frac{11+\cancel{\sqrt{86}}\ \sqrt{51}}{5} = x_1 \\ \frac{11-\cancel{\sqrt{86}}\ \sqrt{51}}{5} = x_2 \end{cases}$$





Quindi f è convessa per $x < \frac{11-\sqrt{51}}{5}$ e per $x > \frac{11+\sqrt{51}}{5}$

f è concava per $\frac{11-\sqrt{51}}{5} < x < \frac{11+\sqrt{51}}{5}$

f ha punti di flesso in $x_1 = \frac{11+\sqrt{51}}{5}$ e $x_2 = \frac{11-\sqrt{51}}{5}$

Abbiamo quindi il diagramma qualitativo:

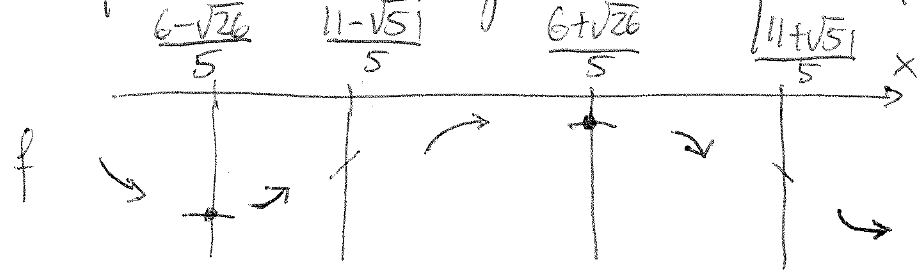


Grafico qualitativo di f: