31/10/12 ESERCITAZIONI DI MATEMATICA (ECE)

ES: 10.2 III) Calcolare l'integrale indefinito:

$$\int \frac{1}{x \log x} dx$$

Riconosciamo la forma $\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx$ con $g(x) = \log x$, $g'(x) = \frac{1}{x}$.

Dalla regola di derivazione della funzione composta $D[\log(g(x))] = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x)$ si può ricavare la regola:

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \log|g(x)| + c$$

Quindi applicando la regola abbiamo:

$$\int \frac{1}{x \log x} dx = \int \frac{1/x}{\log x} dx = \log|\log(x)| + c.$$

ES: 10.2 II) $\int \frac{x+4}{x^2+8x+11} dx$

La funzione integranda è una frazione di polinomi $\frac{N(x)}{D(x)}$ con $\deg N < \deg D$. Possiamo quindi applicare lo sviluppo in frazioni semplici su $\frac{N(x)}{D(x)}$.

Il denominatore $D(x)$ ha discriminante $\Delta = 64 - 44 = 20 > 0$, e perciò due radici reali distinte:

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm 2\sqrt{5}}{2} = -4 \pm \sqrt{5}$$

$D(x)$ si può quindi fattorizzare in

$$D(x) = x^2 + 8x + 11 = 1 \cdot (x - (-4+\sqrt{5}))(x - (-4-\sqrt{5}))$$
$$= (x + 4 - \sqrt{5})(x + 4 + \sqrt{5})$$

Abbiamo quindi lo sviluppo in frazioni semplici

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{x+4}{x^2+8x+11} = \frac{A}{x+4-\sqrt{5}} + \frac{B}{x+4+\sqrt{5}}$$

$$\frac{x+4}{x^2+8x+11} = \frac{A(x+4+\sqrt{5})+B(x+4-\sqrt{5})}{(x+4-\sqrt{5})(x+4+\sqrt{5})}$$

Per determinare i coefficienti A e B dobbiamo eguagliare i numeratori (i denominatori sono evidentemente uguali).

$$x+4 = Ax + A4 + A\sqrt{5} + Bx + B4 - B\sqrt{5}$$

$$x+4 = (A+B)x + A4 + A\sqrt{5} + B4 - B\sqrt{5}$$

Due polinomi (in x) sono uguali se a parità di grado i coefficienti sono uguali, cioè:

$$\begin{cases} 1 = A+B \\ 4 = A4 + A\sqrt{5} + B4 - B\sqrt{5} \end{cases}$$

$$B = 1-A$$

$$4 = A4 + A\sqrt{5} + (1-A)4 - (1-A)\sqrt{5} = \cancel{A4} + A\sqrt{5} + 4 - \cancel{A4} - \sqrt{5} + A\sqrt{5} =$$

$$\cancel{4} = \cancel{4} + 2A\sqrt{5} - \sqrt{5} \iff \sqrt{5} = 2A\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} \quad ; \quad B = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Abbiamo quindi lo sviluppo: $\frac{x+4}{x^2+8x+11} = \frac{1/2}{x+4-\sqrt{5}} + \frac{1/2}{x+4+\sqrt{5}}$.

$$\int \frac{x+4}{x^2+8x+11}\,dx = \int \frac{1/2}{x+4-\sqrt{5}}\,dx + \int \frac{1/2}{x+4+\sqrt{5}}\,dx = \frac{1}{2}\log|x+4-\sqrt{5}| + \frac{1}{2}\log|x+4+\sqrt{5}| + c$$

$$= \frac{1}{2}\log|x^2+8x+11| + c.$$

ES: 10.3 VIII) $\int \frac{\log^4 x}{x}\,dx$

Bisogna integrare per sostituzione, con la sostituzione $y = \log x$; quindi $dy = \frac{1}{x}dx \Rightarrow dx = x\,dy$.

$$\int \frac{\log^4 x}{x}\,dx = \int \frac{y^4}{x}\,x\,dy = \int y^4\,dy = \frac{1}{5}y^5 + c = \frac{1}{5}\log^5 x + c.$$

Esi 10.10 II) $\int \log(1+2x^2)dx$

Tentando di integrare per sostituzione $t = 2x^2+1$ non si arriva ad una soluzione.
Integriamo per parti riconoscendo il fattore costante 1 nella funzione integranda.

⌈ RIC: Dalla regola di derivazione di un prodotto

$$D[fg] = f'g + fg'$$

si ricava facilmente la regola di integrazione per parti in maniera mnemonica:

$$fg = \int f'g + \int fg'$$

$$\int f'g = fg - \int fg'$$

⌋

Quindi: $\int 1 \cdot \log(1+2x^2)dx = x\log(1+2x^2) - \underbrace{\int x \frac{1}{1+2x^2} \cdot 4x\,dx}_{(*)}$

$$(*) = 2\int \frac{2x^2}{2x^2+1}dx = 2\int \frac{2x^2+1 \overbrace{-}^{dx}}{2x^2+1} = 2\int \frac{1}{2x^2+1}dx = 2x - 2\underbrace{\int \frac{1}{2x^2+1}dx}_{(**)}$$

Possiamo ricondurre $(**)$ ad un integrale immediato effettuando la sostituzione $y^2 = 2x^2$, o meglio $y = \sqrt{2}x$, con $dx = \frac{1}{\sqrt{2}}dy$.

$$(**) = \int \frac{1}{y^2+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}dy = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{y^2+1}dy = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan y + c =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x) + c$$

Quindi abbiamo:

$$\int \log(1+2x^2)dx = x\log(1+2x^2) - \left(2x - 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x) + c\right) =$$

$$= x\log(1+2x^2) - 2x + \sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}x) + c.$$

11.1 IV) $\int_{-2}^{2} |x| e^{x^2} dx$

Per la proprietà di Additività dell'integrale (rispetto al dominio di integrazione):

$$\int_{-2}^{2} |x| e^{x^2} dx = \int_{-2}^{0} |x| e^{x^2} dx + \int_{0}^{2} |x| e^{x^2} dx =$$

per definizione di valore assoluto $\longrightarrow$ $= \int_{-2}^{0} (-x) e^{x^2} dx + \int_{0}^{2} x e^{x^2} dx =$

$$= -\int_{-2}^{0} x e^{x^2} dx + \int_{0}^{2} x e^{x^2} dx$$

Determiniamo quindi l'integrale indefinito:

$$\int x e^{x^2} dx$$

applicando la sostituzione $t = x^2$: $\left(dt = 2x dx \; ; \; dx = \frac{dt}{2x}\right)$

$$\int x e^{x^2} dx = \int x e^{t} \frac{dt}{2x} \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2} \int e^{t} dt = \frac{1}{2} e^{t} = \frac{1}{2} e^{x^2}$$

per cancellazione di x

L'integrale definito vale quindi:

$$\int_{-2}^{2} |x| e^{x^2} dx = -\left[\frac{1}{2} e^{x^2}\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{1}{2} e^{x^2}\right]_{0}^{2} =$$

$$= -\left(\frac{1}{2} e^{0} - \frac{1}{2} e^{4}\right) + \frac{1}{2} e^{4} - \frac{1}{2} e^{0} =$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{4} + \frac{1}{2} e^{4} - \frac{1}{2} = e^{4} - 1.$$

ES: 11.1 VI) $\int_{0}^{2} \sqrt{2x+1}\, dx$

Applichiamo la sostituzione: $t = 2x+1$; $dt = 2dx$; $dx = \frac{1}{2} dt$

$$\int_{0}^{2} \sqrt{2x+1}\, dx = \int_{1}^{\sqrt{2\cdot 2+1}} \sqrt{t}\, \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int_{1}^{\sqrt{5}} t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \left[\frac{t^{3/2}}{3/2}\right]_{x=0}^{x=2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \left[(2x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_{x=0}^{x=2} =$$

$$= \frac{1}{3} \left[(2\cdot 2+1)^{\frac{3}{2}} - (2\cdot 0+1)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{1}{3} \left(\sqrt{125} - 1\right) = \frac{1}{3} \left(5\sqrt{5} - 1\right).$$

ES: 11.37 VI) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

La funzione integranda $f(x) = \dfrac{e^{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ non è limitata in $[0,1]$ in quanto $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

Calcoliamo una primitiva di $f(x)$ mediante sostituzione $t=-\sqrt{x}$

$$\int \frac{e^{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{e^{1+t}}{\sqrt{x}}(-2\sqrt{x})\,dt = -2\int e^{1+t}\,dt \qquad dt = -\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$$

$$dx = -2\sqrt{x}\,dt$$

$$= -2\int e\cdot e^t\,dt = -2e\int e^t\,dt$$

$$= -2e\cdot e^t + c = -2e^{t+1} + c = -2e^{1-\sqrt{x}} + c$$

L'integrale improprio è quindi:

$$\int_0^1 \frac{e^{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = F(1) - \lim_{\alpha\to 0^+} F(\alpha) \qquad \text{con } F(x) = -2e^{1-\sqrt{x}} \text{ scegliendo } (c=0).$$

$$= -2e^{1-1} - \lim_{\alpha\to 0^+}\left(-2e^{1-\sqrt{\alpha}}\right) =$$

$$= -2 + 2e^{1-0} = 2e - 2$$

ES: 11.38 I) $\displaystyle\int_{e^3}^{+\infty} \frac{1}{x(\log^2 x - 4)}\,dx$

L'integrale è improprio in quanto il dominio di integrazione $[e^3, +\infty)$ non è limitato. La funzione integranda $f(x) = \dfrac{1}{x(\log^2 x - 4)}$ è continua in $[e^3, +\infty)$ e quindi ivi integrabile.

Applichiamo la sostituzione $t = \log x$; $dt = \frac{1}{x}\,dx$; $dx = x\,dt$

$$\int \frac{1}{x(\log^2 x - 4)}\,dx = \int \frac{x}{x(t^2-4)}\,dt = \int \frac{1}{t^2-4}\,dt$$

Fattorizziamo (t^2-4) tramite il prodotto notevole $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$:

$$\int \frac{1}{t^2-4}\,dt = \int \frac{1}{(t-2)(t+2)}\,dt$$

Scomponiamo in frazioni semplici:

$$\frac{1}{(t-2)(t+2)} = \frac{A}{t-2} + \frac{B}{t+2} = \frac{A(t+2)+B(t-2)}{(t-2)(t+2)}$$

$$\Rightarrow \quad 1 = A(t+2)+B(t-2)$$

$$1 = At+2A+Bt-2B$$

$$\underbrace{1}_{\substack{\text{polinomio in } t \\ \text{(di grado 0)}}} = \underbrace{(A+B)t+2A-2B}_{\substack{\text{polinomio in } t \\ \text{(di grado 1)}}} \iff \begin{cases} 0=A+B \\ 1=2A-2B \end{cases}$$

Dal sistema abbiamo: $B=-A \Rightarrow 2A-2(-A)=1$; $4A=1$; $A=\frac{1}{4}$

$B=-\frac{1}{4}$

$$\int \frac{1}{t^2-4}\,dt = \int\left(\frac{1/4}{t-2}+\frac{-1/4}{t+2}\right)dt = \frac{1}{4}\int\frac{1}{t-2}\,dt - \frac{1}{4}\int\frac{1}{t+2}\,dt = \frac{1}{4}\left(\log|t-2|-\log|t+2|\right)+$$

$$+c = \frac{1}{4}\log\frac{|t-2|}{|t+2|}+c = \frac{1}{4}\log\frac{|\log x-2|}{|\log x+2|}+c$$

Quindi $$\int_{e^3}^{+\infty}\frac{1}{x(\log^2 x-4)}\,dx = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{4}\log\frac{|\log x-2|}{|\log x+2|} - \frac{1}{4}\log\frac{|\log e^3-2|}{|\log e^3+2|} =$$

$$= \frac{1}{4}\log 1 - \frac{1}{4}\log\frac{|3-2|}{|3+2|} = 0-\frac{1}{4}\log\frac{1}{5} =$$

$$\cancel{-\frac{1}{4}\log\frac{1}{5}} = -\frac{1}{4}\log 5^{-1} = +\frac{1}{4}\log 5$$