28/11/12 ESERCITAZIONI DI MATEMATICA (ECE)

ES: 12.4 II) Determinare il carattere e la somma della seguente serie:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^n}{4^n}$$

Abbiamo che il termine generale è $u_n = \frac{e^n}{4^n}$ (con piccolo abuso di linguaggio in quanto $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^n}{4^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{n+1}}{4^{n+1}}$ con termine generale vero ~~e~~ $u_n = \frac{e^{n+1}}{4^{n+1}}$).

Siccome $\frac{e^n}{4^n} \geq 0$ la serie è a termini positivi, e siccome $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{4^n} = 0$ non possiamo concludere che la serie diverge.

Possiamo però applicare il Criterio del Rapporto per serie a termini positivi:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \implies \sum u_n \text{ è convergente}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \implies \sum u_n \text{ è divergente.}$$

Abbiamo:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{n+1}/4^{n+1}}{e^n/4^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e}{4} = \frac{e}{4} < 1$$

quindi $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{n}}{e^4}$ è convergente.

Possiamo riscrivere la serie:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^n}{4^n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{e}{4}\right)^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{e}{4}\right)^n\right) - 1 - \frac{e}{4}$$

dove il primo termine è una serie geometrica di ragione $q = \frac{e}{4}$. Naturalmente $|q| < 1$ e vale:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{e}{4}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{e}{4}} = \frac{1}{\frac{4-e}{4}} = \frac{4}{4-e}.$$

La somma della serie è quindi:

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{e^n}{4^n} = \frac{4}{4-e} - 1 - \frac{e}{4} = \frac{\cancel{16}-\cancel{16}+\cancel{4e}-\cancel{4e}+e^2}{4(4-e)} = \frac{e^2}{4(4-e)}$$

__ES__: 12.15 I) Studiare convergenza semplice e assoluta della serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \operatorname{sen}\frac{1}{n}$$

Il termine generale della serie è $u_n = (-1)^n \operatorname{sen}\frac{1}{n}$, quindi è una serie ~~con~~ con termini a segno alternato. Inoltre il termine è infinitesimo: $u_n = (-1)^n \operatorname{sen}\frac{1}{n} \to 0$ per $n \to +\infty$.

Siccome $\bar{u}_n := \operatorname{sen}\frac{1}{n}$ è infinitesimo e decrescente possiamo applicare il Teo. di pag 329 (Guerraggio):

__TEO__: $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \bar{u}_n$ è convergente quando $\bar{u}_n$ è infinitesimo e $\{\bar{u}_n\}$ è una successione decrescente: $\bar{u}_n \geq \bar{u}_{n+1}$

__OSS__: Che $\bar{u}_n$ sia decrescente è evidente poiché

$$\operatorname{sen} a < \operatorname{sen} b \qquad \text{per } 0 \leq a < b \leq \frac{\pi}{2}.$$

Abbiamo quindi che $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \operatorname{sen}\frac{1}{n}$ converge (semplicemente).

Determinare se converge assolutamente significa, per definizione, determinare se converge la serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^n \operatorname{sen}\frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen}\frac{1}{n}.$$

Questa serie ha termine generale $u_n = \operatorname{sen}\frac{1}{n}$ che è un infinitesimo di ordine 1 rispetto a $\frac{1}{n}$ in quanto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0$$

Possiamo allora applicare il Criterio Integrale:

<u>TEO</u>: Se u_n è infinitesimo di ordine a rispetto a $\frac{1}{n}$ (per $n \to +\infty$) allora la serie a termini positivi $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$

- converge se $a > 1$
- diverge se $a \leq 1$

Concludiamo quindi che $\sum \operatorname{sen}\frac{1}{n}$ diverge, cioè che la serie originale non converge assolutamente.